２．　差分商

関数 g(t)が与えられ、$g_i = g(\tau_i)$ とする。もしくは、仮想の関数 g(t)を考え、そのうちのパラメータ値τ_i における関数値g_iが既知であるとする（これらはデータポイントと呼ばれる）。このとき、関数 g のパラメータ値τ_0, ... , τ_{n-1} におけるオーダ n(n-1 次)の差分商は、 [τ_0, ... , τ_{n-1}]g と記述され、次のように定義される：

（式2-1）
$$\begin{cases} [\tau_0,...,\tau_{n-1}]g = \dfrac{[\tau_1,...,\tau_{n-1}]g - [\tau_0,...,\tau_{n-2}]g}{\tau_{n-1}-\tau_0} \\ \vdots \\ [\tau_i,\tau_{i+1}]g = \dfrac{[\tau_{i+1}]g - [\tau_i]g}{\tau_{i+1}-\tau_i} = \dfrac{g_{i+1}-g_i}{\tau_{i+1}-\tau_i} \\ [\tau_i]g = g_i \end{cases}$$

τ_0, ... , τ_{n-1} における n 点 g_0, ... , g_{n-1} を補間するオーダ n の多項式 $f_n(t)$ を表現するニュートンの内挿公式は、差分商の表現により、(式 2-2) となる。

（式2-2）
$$\begin{aligned} & f_n(t) \\ &= g_0 + (t-\tau_0)[\tau_0,\tau_1]g + (t-\tau_0)(t-\tau_1)[\tau_0,\tau_1,\tau_2]g + \cdots + (t-\tau_0)\cdots(t-\tau_{n-2})[\tau_0,\cdots,\tau_{n-1}]g \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(t-\tau_0)\cdots(t-\tau_{i-1})[\tau_0,\cdots,\tau_i]g \end{aligned}$$

これから、オーダ n の差分商[τ_0, ... , τ_{n-1}]g はτ_0, ... , τ_{n-1} における n 点 g_0, ... , g_{n-1} を補間するオーダ n の多項式 $f_n(t)$ の最高次の多項式(t^{n-1}) の係数であることがわかる。

差分商を定義するτ_0, ... , τ_{n-1} は一般的には単調増加な実数で、$\tau_i = \tau_{i+1}$ を考えないが、τ_i における一次微分値$s_i = \dfrac{dg(\tau_i)}{dt}$ が得られるとして、$\tau_i = \tau_{i+1}$ の時には（式 2-1）は（式 2-3）に拡張される。詳細については C.Deboor："A Practical Guide to Splines" by Springer Verlag を参照されたい。

（式2-3）　$[\tau_i,\tau_{i+1}]g = s_i \quad \text{if} \;\; \tau_i = \tau_{i+1}$